UNIVERSITÉ DE POITIERS
Faculté des Sciences Fondamentales et Appliquées
Département de Mathématiques

ÉTUDE D'UN MODÈLE DE LEBOWITZ-RUBINOW DANS LA DYNAMIQUE DES POPULATIONS

Mémoire pour l'obtention du D. E. A. DE MATHÉMATIQUES

Présenté par : **CAMAR-EDDINE Mohamed**

Sous la direction de :

M. Mohamed Boulanouar
et Jean-Michel Rakotoson

Année Universitaire 1997-1998

REMERCIEMENTS

Je tiens à témoigner ma reconnaissance à M. Mohamed Boulanouar et M. Jean-Michel Rakotoson pour leurs conseils et leur disponibilité.

Table des matières

INTRODUCTION

En 1974 Lebowitz et Rubinow [6] ont modélisé l'évolution d'une population de cellules. Chaque cellule est caractérisée par deux variables. La première variable, notée a, désigne l'âge de la cellule. La seconde variable, notée l, désigne la longueur de son cycle, autrement dit, la longueur de l'intervalle entre la naissance et la division de la cellule. La longueur minimale (resp. maximale) d'un cycle d'une quelconque cellule de cette population est l_1 (resp. l_2). Le cycle d'une cellule quelconque, en évolution, a pour longueur l vérifiant $0 \leq l_1 < l < l_2 < \infty$. Comme une cellule ne peut vivre plus que son cycle, son âge a ne peut dépasser la longueur de son cycle, ainsi $0 \leq a \leq l$. Si nous désignons par $f = f(a, l, t)$ la densité de toutes les cellules qui ont à l'instant t un âge a et une longueur de cycle l, alors f vérifie

$$\frac{\partial f}{\partial t}(a, l, t) = -\frac{\partial f}{\partial a}(a, l, t) - \mu(a, l) f(a, l, t)$$

où $\mu(a, l)$ est le taux de mortalité cellulaire.

Toujours selon Lebowitz et Rubinow, la corrélation entre la longueur du cycle d'une cellule fille et celle de sa mère est interprétée mathématiquement par un opérateur K de la manière suivante

$$K f(\cdot, \cdot, t)(l) = f(0, l, t)$$

Ce modèle a été étudié récemment par [5]. Ils ont montré que sous l'une des deux hypothèses suivantes

$$(\mathbf{H1})\begin{cases} K \text{ est positive} \\ K^n \text{ est compact pour un certain } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

$$(\mathbf{H2})\begin{cases} K = K_1 + K_2 \text{ où } K_1 \text{ et } K_2 \text{ sont positifs} \\ K_2 \text{ est faiblement compact} \end{cases}$$

il est bien posé si l'opérateur K est contractif. Si l'opérateur K n'est plus contractif, outre **(H1)** ou **(H2)**, ils ont imposé la restriction suivante

$$\|K\psi\|_{L^1(]l_1,l_2[)} \geq \|\psi\|_{L^1(]l_1,l_2[)}.$$

Dans ce mémoire, nous commençons par rappeler quelques résultats théoriques sur les opérateurs linéaires et les semi-groupes.

Dans le second chapitre nous étudions ce modèle lorsque l'opérateur K est nul. Cette étude nous sera utile ultérieurement.

Dans le troisième chapitre, nous montrons que si

$$K \in \mathcal{L}\left(L^1(]l_1, l_2[)\right)$$

alors ce modèle est bien posé au sens des semi-groupes pour toutes les données initiales dans un L^1-espace. Et puisque la solution du modèle représente une densité qui est sensée être positive, nous terminons alors ce chapitre par l'étude de la positivité de la solution.

Nous finissons ce mémoire par une perspective générale sur l'étude de ce modèle.

Chapitre 1

RAPPELS THÉORIQUES

Dans ce chapitre, nous regroupons quelques définitions et résultats concernant la théorie des opérateurs linéaires positifs et celle des semi-groupes d'opérateurs linéaires positifs dans les espaces de Banach. Mais pour plus de détails sur ces notions générales, nous renvoyons à [2, 3, 4, 7, 8, 9, 10].

Dans la suite nous considérons X un espace de Banach, sur le corps des nombres réels ou complexes, muni de la norme $\| \quad \|$.

1.1 OPÉRATEURS LINÉAIRES

Définition 1.1.1. *Un opérateur linéaire T de domaine $D(T)$ est dit fermé, si son graphe $\mathcal{G}(T)$ est un fermé dans l'espace $X \times X$.*

Définition 1.1.2. *Soit T un opérateur fermé. Le spectre $\sigma(T)$ de l'opérateur T est l'ensemble de tous les $\lambda \in \mathbb{C}$ pour lesquels l'opérateur $(\lambda - T)$ n'a pas d'inverse borné sur X. $\rho(T) = \mathbb{C} \backslash \sigma(T)$ est l'ensemble résolvant de T.*

1.2 SEMI-GROUPES LINÉAIRES

Définition 1.2.1. *Une famille $(T(t))_{t \geq 0}$ est appelée un semi-groupe d'opérateurs linéaires fortement continu sur X (ou un C_0-semi-groupe sur X) si :*

- $T(0) = I$,   *(I est l'identité dans X)*
- $T(t+s) = T(t)T(s)$, $\forall\ t, s \geq 0$
- $\lim\limits_{t \to 0_+} \|T(t)x - x\| = 0$, $\forall\ x \in X$.

Une classe particulière de C_0-semi-groupes est définie par

Définition 1.2.2. *Un C_0-semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ sur X est de contractions si et seulement si*

$$\|T(t)x\| \leq \|x\|$$

pour tout $x \in X$ et tout $t \geq 0$.

Définition 1.2.3. *Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe sur X. On appelle générateur infinitésimal du C_0-semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$, l'opérateur A défini par*

$$Ax = \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t}$$

sur le domaine

$$D(A) = \left\{ x \in X \mid \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \in X \right\}.$$

Dans la pratique il s'avère que la construction d'un C_0-semi-groupe est en général difficile. Les conditions nécessaire et suffisante pour l'existence d'un C_0-semi-groupe sont données par le

Théorème 1.2.1 (Hille-Yosida voir [9]**).** *Un opérateur linéaire A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ sur X, vèrifiant $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$, $t \geq 0$ pour certaines constantes $M \geq 1$ et $\omega \in \mathbb{R}$ si et seulement si*

- *A est fermé à domaine dense dans X*
- $]\omega, \infty[\subset \rho(A)$ *et* $\|(\lambda - A)^{-n}\| \leq M(\lambda - \omega)^{-n}$ *pour tout* $\lambda > \omega, n \in \mathbb{N}^*$.

Théorème 1.2.2 (voir [8])**.** *Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe sur X de générateur infinitésimal A. Alors le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) = Au(t) \\ u(0) = \varphi \end{cases}$$

admet une unique solution $u \in C^1(\mathbb{R}_+, X)$ pour toute donnée initiale $\varphi \in D(A)$. En plus, cette solution est donnée par

$$u(t) = T(t)\varphi.$$

1.3 OPÉRATEURS LINÉAIRES POSITIFS

Définition 1.3.1. *Soit X un espace de Banach. Un ensemble $X_+ \subset X$ est dit un cône positif si X_+ est fermé dans X, stable par l'addition et la multiplication par des réels positifs et vérifie $X_+ \cap -X_+ = \{0\}$. Tout élément $x \in X_+$ est dit positif.*

Définition 1.3.2. *Soit X un espace de Banach.*

- *L'espace de Banach X est ordonné, s'il est muni d'un cône X_+.*
- *L'espace de Banach ordonné X est réticulé si pour tout $(x, y) \in X^2$, on a, $\sup(x, y) \in X$ et $\inf(x, y) \in X$.*

Les espaces L^p, $p \geq 1$, ordonnés par le cône des fonctions positives sont des espaces de Banach réticulés.

1.4 SEMI-GROUPES LINÉAIRES POSITIFS

Définition 1.4.1. *Un C_0-semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ sur X est dit positif si l'opérateur $T(t)$ est positif pour tout $t \geq 0$.*

Théorème 1.4.1 (voir [2]). *Soit X un espace de Banach réticulé. Un C_0-semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ sur X, de générateur infinitésimal A, est positif si et seulement si $(\lambda - A)^{-1}$ l'est aussi pour un λ assez grand.*

Chapitre 2

ÉTUDE DU CAS OÙ L'OPÉRATEUR K EST NUL

Dans cette partie et la suivante nous considérons

$$\Omega = \{(a,l); \quad | \quad 0 < a < l \quad \text{et} \quad l_1 < l < l_2\}$$

où, $0 < l_1 < l < l_2 < \infty$ avec l_1 et l_2 des constantes. Nous désignons par Γ_1 et Γ_2 les parties de la frontière de Ω définies par

$$\Gamma_1 = \{(0,l); \quad | \quad l_1 < l < l_2\}$$

et

$$\Gamma_2 = \{(l,l); \quad | \quad l_1 < l < l_2\}.$$

Ensuite nous considérons le cadre fonctionnel $L^1(\Omega)$ muni de sa norme naturelle donnée par

$$\|\varphi\| = \int_\Omega |\varphi(a,l)|\, dadl. \tag{2.0.2.1}$$

Nous commençons par établir un théorème de traces qui nous permettra de donner un sens à tous les opérateurs non bornés que nous allons rencontrer durant ce travail. Nous finissons ce chapitre par l'étude de l'opérateur A_0 que nous définissons le moment voulu.

2.1 THÉORÈME DE TRACES

Pour donner un sens aux opérateurs que nous allons rencontrer dans ce travail, nous allons démontrer un résultat concernant les espaces de traces. Pour ce faire, nous introduisons l'espace (dit de Sobolev partiel) suivant

$$W^1(\Omega) = \left\{ \varphi \in L^1(\Omega); \quad | \quad \frac{\partial \varphi}{\partial a} \in L^1(\Omega) \right\}$$

qui est un espace de Banach pour la norme

$$\|\varphi\|_{W^1(\Omega)} = \|\varphi\| + \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \right\|.$$

Ensuite, nous notons par γ_1 et γ_2 les opérateurs suivants

$$\gamma_1 : \varphi \longrightarrow \varphi_{|\Gamma_1}$$

et

$$\gamma_2 : \varphi \longrightarrow \varphi_{|\Gamma_2}$$

Enfin nous introduisons l'espace $L^1(]l_1, l_2[)$ *dit de traces* muni de sa norme naturelle

$$\|\psi\|_{L^1(]l_1,l_2[)} = \int_{l_1}^{l_2} |\psi(l)|\, dl.$$

Théorème 2.1.1. *Les opérateurs γ_1 et γ_2 sont linéaires bornés de $W^1(\Omega)$ dans $L^1(]l_1, l_2[)$.*

Démonstration. Pour tout élément $\varphi \in W^1(\Omega)$, nous avons

$$\gamma_1\varphi(l) = \varphi(x, l) - \int_0^x \frac{\partial \varphi}{\partial a}(s, l) ds.$$

Donc

$$\int_{l_1}^{l_2} \int_0^l |\gamma_1\varphi(l)|\, dxdl \leq \int_{l_1}^{l_2} \int_0^l |\varphi(x, l)|\, dxdl + \int_{l_1}^{l_2} \int_0^l \int_0^x \left| \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s, l) \right| dsdxdl$$

ou encore

$$l_1 \|\gamma_1\varphi\|_{L^1(]l_1,l_2[)} \leq \|\varphi\| + l_2 \int_{l_1}^{l_2} \int_0^l \left| \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s, l) \right| dsdl.$$

Ainsi

$$l_1 \left\|\gamma_1\varphi\right\|_{L^1(]l_1,l_2[)} \leq \|\varphi\| + l_2 \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial a}\right\|.$$

Autrement dit

$$\left\|\gamma_1\varphi\right\|_{L^1(]l_1,l_2[)} \leq \max\left\{\tfrac{1}{l_1}, \tfrac{l_2}{l_1}\right\} \|\varphi\|_{W^1(\Omega)}$$

ce qui prouve, mis à part sa linéarité évidente, que l'opérateur γ_1 est borné de $W^1(\Omega)$ dans $L^1(]l_1,l_2[)$. La continuité de l'opérateur γ_2 s'obtient avec le même raisonnement en partant de l'égalité

$$\gamma_2\varphi(l) = \varphi(x,l) - \int_l^x \frac{\partial\varphi}{\partial a}(s,l)ds$$

pour $\varphi \in W^1(\Omega)$. □

2.2 L'OPÉRATEUR A_0

Dans cette section, nous considérons l'opérateur A_0 défini par

$$A_0\varphi(a,l) = -\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}(a,l) - \mu(a,l)\varphi(a,l)$$

sur le domaine

$$D(A_0) = \left\{\varphi \in W^1(\Omega); \quad | \quad \gamma_1\varphi = 0\right\}.$$

Cette définition a bien un sens d'après le théorème de traces.

Nous imposons à μ l'hypothèse suivante

(H) $$\mu \in L^\infty(\Omega)$$

et nous désignons par μ_0 la valeur

$$\mu_0 = \inf_{(a,l)\in\Omega} \operatorname{ess} \mu(a,l).$$

Dans ces conditions nous avons le

Théorème 2.2.1. *Supposons que l'hypothèse* **(H)** *soit vérifiée, alors l'opérateur A_0 de domaine $D(A_0)$ engendre sur $L^1(\Omega)$ un C_0-semi-groupe. De plus pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ l'opérateur $(\lambda - A_0)^{-1}$ est positif donné par*

$$(\lambda - A_0)^{-1} g(a,l) = \int_0^a e^{-\int_s^a (\lambda + \mu(\tau,l))d\tau} g(s,l)ds. \qquad (2.2.2.1)$$

Démonstration. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $g \in L^1(\Omega)$, alors un simple calcul montre que l'opérateur $(\lambda - A_0)^{-1}$ est donné par la relation 2.2.2.1.

Maintenant si $\lambda > -\mu_0$, alors $\varphi = (\lambda - A_0)^{-1} g$ est l'unique solution de l'équation

$$\lambda\varphi = -\frac{\partial\varphi}{\partial a} - \mu\varphi + g.$$

En multipliant cette dernière identité par $\operatorname{sgn}\varphi$ et en intégrant sur Ω nous obtenons

$$\lambda \|\varphi\| = \int_{l_1}^{l_2} \int_0^l \left[-\frac{\partial |\varphi|}{\partial a}(a,l) - \mu(a,l)|\varphi(a,l)| + \operatorname{sgn}\varphi g(a,l) \right] dadl.$$

En tenant compte de l'hypothèse **(H)** nous aurons

$$\begin{aligned}
(\lambda + \mu_0)\|\varphi\| &\leq \int_{l_1}^{l_2} \int_0^l \frac{-\partial |\varphi|}{\partial a}(a,l)dadl + \|g\| \\
&= \int_{l_1}^{l_2} |\varphi(0,l)|\, dl - \int_{l_1}^{l_2} |\varphi(l,l)|\, dl + \|g\| \\
&= -\|\gamma_2\varphi\|_{L^1(]l_1,l_2[)} + \|g\| \\
&\leq \|g\|.
\end{aligned}$$

Comme A_0 est un opérateur fermé sur $L^1(\Omega)$ à domaine $D(A_0)$ dense dans $L^1(\Omega)$, nous concluons alors cette démonstration par le théorème de Hille-Yosida.

La positivité de la résolvante est évidente. $\square$

Nous finissons ce chapitre par le lemme suivant

Lemme 2.2.1. *Supposons que l'hypothèse* **(H)** *soit vérifiée alors pour tout* $\lambda > -\mu_0$, *l'opérateur* $\gamma_2(\lambda - A_0)^{-1}$ *est linéaire positif et borné de* $L^1(\Omega)$ *dans* $L^1(]l_1, l_2[)$.

Preuve. Soit $g \in L^1(\Omega)$ alors nous avons

$$\gamma_2(\lambda - A_0)^{-1}g(l) = \int_0^l e^{-\int_s^l(\lambda+\mu(\tau,l))d\tau} g(s,l)ds.$$

$$\begin{aligned}\|\gamma_2(\lambda - A_0)^{-1}g\| &\leq \int_{l_1}^{l_2}\int_0^l e^{-\int_s^l(\lambda+\mu(\tau,l))d\tau}\,|g(s,l)|\,dsdl \\ &\leq e^{-(\lambda+\mu_0)l_1}\int_{l_1}^{l_2}\int_0^l |g(s,l)|\,dsdl \\ &\leq \|g\|\end{aligned}$$

d'où la continuité demandée. La positivité est évidente. □

Chapitre 3

ÉTUDE DU CAS OÙ L'OPÉRATEUR K EST NON NUL

Dans ce chapitre nous supposons toujours que $0 < l_1 < \infty$, de même que nous considérons l'espace $L^1(\Omega)$. Dans la première partie, nous introduisons des conditions aux limites, par le biais d'un opérateur de bords K, arbitraire mais borné sur l'espace des traces. Dans ce nouveau contexte, nous donnons un sens à l'opérateur A, et nous finissons cette partie par l'étude de la génération d'un C_0-semi-groupe par cet opérateur.

Nous rappelons que l'hypothèse **(H)** est

(H) $$\mu \in L^\infty(\Omega)$$

que nous supposons vérifiée le long de cette partie et nous désignons toujours par μ_0 la valeur

$$\mu_0 = \inf_{(a,l)\in\Omega} \text{ess}\, \mu(a,l).$$

3.1 CONDITIONS AUX LIMITES

Nous considérons, désormais, un opérateur dit de *bords*

$$K : L^1(]l_1, l_2[) \longrightarrow L^1(]l_1, l_2[)$$

linéaire et borné. Ensuite, nous introduisons l'opérateur A par

$$A\varphi(a,l) = -\frac{\partial \varphi}{\partial a}(a,l) - \mu(a,l)\varphi(a,l)$$

sur le domaine

$$D(A) = \left\{\varphi \in W^1(\Omega); \quad | \quad \gamma_1\varphi = K\gamma_2\varphi\right\}.$$

Dans ce nouveau contexte nous commençons alors par définir la fonction

$$\alpha_\lambda(a,l) = e^{-\int_0^a (\lambda+\mu(\tau,l))d\tau}$$

vérifiant

$$\alpha_\lambda(a,l) \leq e^{-(\lambda+\mu_0)a} \tag{3.1.3.1}$$

et l'opérateur

$$K_\lambda\psi = K\left[(\gamma_2\alpha_\lambda)\psi\right].$$

Lemme 3.1.1. *Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'opérateur K_λ est linéaire borné dans $L^1(]l_1, l_2[)$. De plus*

$$\|K_\lambda\psi\|_{L^1(]l_1,l_2[)} \leq e^{-(\lambda+\mu_0)l_1} \|K\|_{L^1(]l_1,l_2[)} \|\psi\|_{L^1(]l_1,l_2[)}.$$

Preuve. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Comme l'hypothèse **(H)** est vérifiée alors la relation 3.1.3.1 nous donne

$$\gamma_1\alpha_\lambda(l) \leq e^{-(\lambda+\mu_0)l} \leq e^{-(\lambda+\mu_0)l_1}.$$

Par conséquent pour tout élément $\psi \in L^1(]l_1, l_2[)$ nous avons

$$\begin{aligned}
\|K_\lambda \psi\|_{L^1(]l_1,l_2[)} &= \int_{l_1}^{l_2} |K[(\gamma_2\alpha_\lambda)\psi](l)|\, dl \\
&\leq \|K\|_{\mathcal{L}(L^1(]l_1,l_2[))} \int_{l_1}^{l_2} |(\gamma_2\alpha_\lambda)\psi|\,(l)dl \\
&\leq e^{(\lambda+\mu_0)l_1} \|K\|_{\mathcal{L}(L^1(]l_1,l_2[))} \int_{l_1}^{l_2} |\psi|\,(l)dl \\
&\leq e^{-(\lambda+\mu_0)l_1} \|K\|_{\mathcal{L}(L^1(]l_1,l_2[))} \|\psi\|_{L^1(]l_1,l_2[)}.
\end{aligned}$$

□

3.2 L'OPÉRATEUR A AVEC $\|K\| \leq 1$

Dans ce paragraphe, nous allons montrer que l'opérateur A engendre un C_0-semi-groupe de contractions dans $L^1(\Omega)$. En se basant sur l'étude faite précédemment sur l'opérateur A_0, nous avons le

Lemme 3.2.1. *Pour tout $\lambda > -\mu_0$, la résolvante de l'opérateur A est donnée par*

$$(\lambda - A)^{-1} = \alpha_\lambda (I - K_\lambda)^{-1} K\gamma_2(\lambda - A_0)^{-1} + (\lambda - A_0)^{-1}.$$

Preuve. Soient $\lambda > -\mu_0$ et $g \in L^1(\Omega)$. La solution générale de l'équation

$$(\lambda\varphi + \frac{\partial\varphi}{\partial a} + \mu\varphi) = g \tag{3.2.3.1}$$

est donnée par

$$\varphi = \alpha_\lambda\psi + (\lambda - A_0)^{-1}g, \tag{3.2.3.2}$$

où, ψ est une fonction quelconque de la variable l.

Si $\psi \in L^1(]l_1, l_2[)$, alors la solution φ est dans $W^1(\Omega)$ puisque

$$\begin{aligned}
\|\varphi\| &= \left\|\alpha_\lambda\psi + (\lambda - A_0)^{-1}g\right\| \\
&\leq \int_{l_1}^{l_2}\int_0^l \alpha_\lambda(a,l) \mid \psi(l) \mid dadl + \left\|(\lambda - A_0)^{-1}g\right\|.
\end{aligned}$$

En utilisant la relation 3.1.3.1 nous obtenons

$$\begin{aligned}\|\varphi\| &\leq \int_{l_1}^{l_2}\left[\int_0^l e^{-(\lambda+\mu_0)a}da\right]|\psi(l)|\,dl + \left\|(\lambda - A_0)^{-1}g\right\| \\ &\leq \frac{1}{(\lambda+\mu_0)}\int_{l_1}^{l_2}\int_0^l |\psi(l)|\,dl + \left\|(\lambda - A_0)^{-1}g\right\|.\end{aligned}$$

Ensuite, comme φ est solution de l'équation 3.2.3.1, on a

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial a}\right\| &= \|-\lambda\varphi - \mu\varphi + g\| \\ &\leq \mid \lambda \mid \|\varphi\| + \|\mu\varphi\| + \|g\| \\ &\leq (\mid \lambda \mid + \|\mu\|_{L^\infty(\Omega)})\,\|\varphi\| + \|g\|.\end{aligned}$$

Ainsi nous avons $\varphi \in W^1(\Omega)$.

Or la solution φ est un élément de $D(A)$ si et seulement si nous avons

$$\gamma_1\varphi = K\gamma_2\varphi,$$

autrement dit

$$\begin{aligned}\psi &= K\gamma_2\alpha_\lambda\psi + K\gamma_2(\lambda - A_0)^{-1}g \\ &= K_\lambda\psi + K\gamma_2(\lambda - A_0)^{-1}g.\end{aligned} \tag{3.2.3.3}$$

Comme $\lambda > -\mu_0$, alors d'après la relation 3.1.1 l'opérateur K_λ est strictement contractif. Donc l'équation 3.2.3.3 admet l'unique solution donnée par

$$\psi = (I - K_\lambda)^{-1}K\gamma_2(\lambda - A_0)^{-1}g.$$

Pour achever la preuve il suffit de reporter ψ dans la relation 3.2.3.2. □

Lemme 3.2.2. *Pour toute fonction $\varphi \in L^1(\Omega)$ et tout $\lambda > -\mu_0$ nous avons*

$$\left\|(\lambda - A)^{-1}\varphi\right\| \leq \frac{\|\varphi\|}{(\lambda+\mu_0)}.$$

Preuve. Soient $\lambda > -\mu_0$ et $g \in L^1(\Omega)$. D'après le lemme précédent, la fonction $\varphi = (\lambda - A)^{-1}g$ est l'unique solution de l'équation 3.2.3.1 vérifiant les conditions aux limites

$$\gamma_1\varphi = K\gamma_2\varphi.$$

En multipliant la relation 3.2.3.1 par $\operatorname{sgn}\varphi$ et en intégrant sur Ω nous obtenons

$$\lambda\|\varphi\| = -\int_\Omega \frac{\partial|\varphi|}{\partial a}(a,l)dadl - \int_\Omega \mu(a,l)\,|\varphi|\,(a,l)dadl + \int_\Omega [\operatorname{sgn}\varphi g]\,(a,l)dadl$$

ou encore

$$\begin{aligned}(\lambda + \mu_0)\|\varphi\| &\leq -\int_\Omega \frac{\partial|\varphi|}{\partial a}(a,l)dadl + \|g\| \\ &= I + \|g\|.\end{aligned}$$

Pour le terme I nous avons

$$\begin{aligned} I &= -\int_{l_1}^{l_2}\left[\int_0^l \frac{\partial|\varphi|}{\partial a}(a,l)da\right]dl \\ &= -\int_{l_1}^{l_2}\left[|\gamma_2\varphi(l)| - |\gamma_1\varphi(l)|\right]dl \\ &= \|\gamma_1\varphi\|_{L^1(]l_1,l_2[)} - \|\gamma_2\varphi\|_{L^1(]l_1,l_2[)}.\end{aligned}$$

En utilisant les conditions aux limites nous obtenons

$$I \leq 0. \tag{3.2.3.4}$$

Ainsi nous avons

$$\|\varphi\| \leq \frac{\|g\|}{(\lambda+\mu_0)},$$

ce qui achève la preuve. □

Comme il est aisé de vérifier que l'opérateur A est fermé à domaine dense dans $L^1(\Omega)$, alors le lemme précédent et le théorème de Hille-Yosida impliquent le

Théorème 3.2.1. *L'opérateur A engendre sur $L^1(\Omega)$ un C_0-semi-groupe $(U(t))_{t\geq 0}$ de contractions.*

3.3 L'OPÉRATEUR A AVEC $\|K\| > 1$

Dans cette partie les démonstrations précédentes ne sont plus valables en raison de la relation 3.2.3.4 qui n'est plus vérifiée. Alors, pour surmonter cette difficulté, nous définissons sur $L^1(\Omega)$ la norme suivante

$$\|\varphi\|_1 = \int_\Omega q^{\frac{a}{l}} |\varphi(a,l)| \, dadl \tag{3.3.3.1}$$

où, $q = \|K\|_{\mathcal{L}(L^1(]l_1,l_2))}$. Les deux normes 2.0.2.1 et 3.3.3.1 sont équivalentes puisque

$$\|\varphi\| \leq \|\varphi\|_1 \leq \|K\| \, \|\varphi\| . \tag{3.3.3.2}$$

Lemme 3.3.1. *Pour toute fonction $\varphi \in L^1(\Omega)$ et tout $\lambda > \frac{1}{l_1} \ln q - \mu_0$ nous avons*

$$\left\|(\lambda - A)^{-1}\varphi\right\|_1 \leq \frac{\|\varphi\|_1}{(\lambda - (\frac{1}{l_1} \ln q - \mu_0))}.$$

Preuve. Soient $\lambda > \frac{1}{l_1} \ln q - \mu_0$ et $g \in L^1(\Omega)$. la fonction $\varphi = (\lambda - A)^{-1}g$ est l'unique solution de l'équation 3.2.3.1 vérifiant les conditions aux limites. En multipliant l'équation 3.2.3.1 par $q^{\frac{a}{l}} \operatorname{sgn} \varphi$ et en intégrant sur Ω nous obtenons

$$\begin{aligned}\lambda \|\varphi\| = &- \int_\Omega q^{\frac{a}{l}} \frac{\partial |\varphi|}{\partial a}(a,l) dadl - \int_\Omega q^{\frac{a}{l}} \mu(a,l) \, |\varphi(a,l)| \, dadl \\ &+ \int_\Omega q^{\frac{a}{l}} \operatorname{sgn} \varphi(a,l) g(a,l) dadl\end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned}(\lambda + \mu_0) \|\varphi\|_1 &\leq - \int_\Omega q^{\frac{a}{l}} \frac{\partial |\varphi|}{\partial a}(a,l) dadl + \|g\|_1 \\ &= J + \|g\|_1 .\end{aligned} \tag{3.3.3.3}$$

En utilisant une intégration par parties nous obtenons

$$\begin{aligned}
J &= -\int_{l_1}^{l_2}\left[\int_0^l \frac{\partial\left[q^{\frac{a}{l}}|\varphi|\right]}{\partial a}(a,l)da\right]dl + \int_\Omega \frac{\ln q}{l} q^{\frac{a}{l}} |\varphi(a,l)|\, dadl \\
&\leq -q\int_{l_1}^{l_2} |\varphi|(l,l)dl + \int_{l_1}^{l_2} |\varphi(0,l)|\, dl + \frac{\ln q}{l_1}\|\varphi\|_1 \\
&= \|\gamma_1\varphi\|_{L^1(]l_1,l_2[)} - q\,\|\gamma_2\varphi\|_{L^1(]l_1,l_2[)} + \frac{\ln q}{l_1}\|\varphi\|_1 .
\end{aligned}$$

Grâce aux conditions aux limites cette dernière relation devient

$$J \leq (q-q)\,\|\gamma_1\varphi\|_{L^1(]l_1,l_2[)} + \frac{\ln q}{l_1}\|\varphi\|_1$$

que nous reportons dans 3.3.3.3 pour obtenir

$$\left\|(\lambda - A)^{-1}g\right\|_1 \leq \frac{\|g\|_1}{(\lambda+\mu_0 - \frac{1}{l_1}\ln q)}.$$

Ainsi la preuve est finie. □

En utilisant ce lemme et en rappelant que $q = \|K\|_{\mathcal{L}(L^1(]l_1,l_2))}$, nous pouvons énoncer le résultat suivant

Théorème 3.3.1. *L'opérateur A engendre sur $L^1(\Omega)$ un C_0-semi-groupe $(U(t))_{t\geq 0}$ vérifiant*

$$\|U(t)\varphi\| \leq q e^{(\frac{1}{l_1}\ln q - \mu_0)t}\,\|\varphi\|_1$$

pour toute fonction $\varphi \in L^1(\Omega)$.

Preuve. Puisque toutes les conditions du théorème de Hille-Yosida sont vérifiées, alors l'opérateur A engendre bien un C_0-semi-groupe $(U(t))_{t\geq 0}$ vérifiant

$$\|U(t)\varphi\|_1 \leq e^{(\frac{1}{l_1}\ln q - \mu_0)t}\,\|\varphi\|_1$$

L'équivalence des deux normes, donnée par la relation 3.3.3.2, achève la preuve. □

Théorème 3.3.2 (régularité). *Pour toute donnée initiale $\varphi \in D(A)$ le modèle*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial a}(a,l,t) = -\dfrac{\partial f}{\partial a}(a,l,t) - \mu(a,l)f(a,l,t) \\ Kf(\cdot,\cdot,t)(l) = f(0,l,t) \\ f(a,l,0) = \varphi(a,l) \end{cases} \tag{3.3.3.4}$$

admet une unique solution $f \in C^1(\mathbb{R}_+, L^1(\Omega))$. En plus, cette solution est donnée par

$$f(a,l,t) = T(t)\varphi(a,l).$$

Nous finissons ce chapitre par l'étude de la positivité de ce semi-groupe.

Théorème 3.3.3. *Si l'opérateur K est positif dans $L^1(]l_1,l_2[)$ alors le C_0-semi-groupe $(U(t))_{t\geq 0}$ est positif sur $L^1(\Omega)$.*

Preuve. Soit λ assez grand et $g \in L^1(\Omega)$ et $g \geq 0$. Nous savons que la résolvante de l'opérateur A est donnée par

$$(\lambda - A)^{-1}g = \alpha_\lambda(I - K_\lambda)^{-1}K\gamma_1(\lambda - A_0)^{-1}g + (\lambda - A_0)^{-1}g.$$

En tenant compte du théorème 2.2.1 et du lemme 2.2.1 nous pouvons écrire

$$(\lambda - A)^{-1} \geq \alpha_\lambda(I - K_\lambda)^{-1}K\gamma_1(\lambda - A_0)^{-1}.$$

Comme λ est assez grand alors d'après le lemme 3.1.1 $\|K_\lambda\|_{\mathcal{L}(L^1(]l_1,l_2[)} < 1$. Donc

$$(\lambda - A)^{-1} \geq \alpha_\lambda \sum_{n=0} K_\lambda^n K\gamma_1(\lambda - A_0)^{-1}g$$

ou encore

$$(\lambda - A)^{-1} \geq \alpha_\lambda K\gamma_1(\lambda - A_0)^{-1}g \geq 0 \quad \text{p.p sur } \Omega.$$

Nous finissons cette preuve par le théorème 1.4.1. □

PERSPECTIVES

Nous venons de démontrer l'existence et l'unicité de la solution du modèle

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t}(a,l,t) = -\dfrac{\partial f}{\partial a}(a,l,t) - \mu(a,l)f(a,l,t) \\ Kf(\cdot,\cdot,t)(l) = f(0,l,t) \\ f(a,l,0) = \varphi(a,l) \end{cases} \tag{3.3.3.5}$$

sous de moindres hypothèses en comparaison avec l'étude de [5]. En effet la seule condition que nous avons imposée à l'opérateur K est la continuité qui reste largement faible par rapport aux hypothèses imposées dans [5] à savoir

$$\textbf{(H1)} \begin{cases} K \text{ est positive} \\ K^n \text{ est compact pour un certain } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

$$\textbf{(H2)} \begin{cases} K = K_1 + K_2 \text{ où } K_1 \text{ et } K_2 \text{ sont positifs} \\ K_2 \text{ est faiblement compact} \end{cases}$$

Maintenant que la solution de ce modèle existe et est unique, d'autres questions se posent alors.

- Il se peut qu'une donnée initiale φ soit dans le noyau de l'opérateur $U(t_0)$ pour un certain t_0. Autrement dit la densité cellulaire est nulle à l'instant t_0. Quelles sont les conditions sur l'opérateur K pour les quelles de tels phénomènes ne se produisent pas ?
- Dans le cas où la solution existe et est unique. Comment se comporte-t-elle au cours du temps ?

– Nous avons imposé la condition $l_1 > 0$. Qu'en est-il si $l_1 = 0$? Existerait-il une solution ?

Bibliographie

[1] W. Arendt. *Resolvent Positive operators.* Pro. London Math. Soc. 3(54). pp.321–349. 1987.

[2] Ph. Clément and al. *One-Parameter Semigroups.* North-Holland. Amerterdam, New York.1987.

[3] E. B. Davies. *One-Parameter Semigroups.* Academic Press.,London, New York. 1980.

[4] J. A. Goldstein. *Semigroups of Linear Operators and Applications.* Oxford University Press Clarendon Press.,New York. 1985.

[5] K. Latrach & M. Mokhtar-Kharroubi *On An Unbounded Linear Operator Arising In The Theory Of Growing Cell Population* J. Math. Anal. Appl. 211., N.1, 273-294. 1997.

[6] Lebowitz & Rubinow *A Theory For The Age And Generation Time Distribution Of A Microbial Population.* J. Math. Biol. (1), 17-36., 1974.

[7] P. Meyer-Nieberg. *Banach Lattices.* Springer–Verlag. Berlin Heidelberg New York. 1991.

[8] R. Nagel ed *One-Parameter Semigroups of Positive operators.* Springer–Verlag. L.N.M. 1184. Berlin, New York. 1986.

[9] A. Pazy. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differrential Equations.* Springer Verlag. Berlin, New York. 1987.

[10] H. Schaefer. *Banach Lattices and Positive Operators.* Springer Verlag. New York Berlin. 1974.